VII. GEWÖHNL. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

VII.1 Terminologie

gewöhnliche Dgl. (ODE) : Gleichung für $y(x)$ ← eine Variable

allgemein: $F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$

(„n-te Ordnung")

heißt „linear", falls $y^{(k)}$ $(k=0,\ldots,n)$ nur linear in F $\quad y^{(0)} \equiv y$

allgemeine lineare ODE n-ter Ordnung explizit:

$$y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_1(x)\, y'(x) + f_0(x)\, y(x) = f(x)$$

abgekürzt (mit $f_n \equiv 1$) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$ $\qquad$ (7.1)

oder in „Operator-Form": $(L_n y)(x) = f(x)$ mit $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\, \partial_x^k$

ODE heißt „regulär" solange die $f_k(x)$ regulär sind, sonst „singulär"

$f(x)$ heißt „Inhomogenität" ⇝ (7.1) ist $\begin{cases} \text{inhomogen} & \text{falls } f \neq 0 \\ \text{homogen} & \text{falls } f = 0 \end{cases}$

Aussagen über lineare ODEs:

- allg. Lösung von (7.1) ist eine n-parametrige Schar von Funktionen $y_{c_1,c_2,\dots,c_n}(x)$

  Parameter $c_1, c_2, \dots, c_n$

- K Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ heißen linear unabhängig, wenn $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_k y_k(x) \equiv 0 \implies \alpha_k = 0 \; \forall k$

- homogene ODE $L_n y = 0$ hat genau n linear unabhängige Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$

- Lösungen von $L_n y = 0$ bilden einen n-dimensionalen Vektorraum:

  Bew.: $L_n y_a = 0$ & $L_n y_b = 0 \rightsquigarrow L_n(\alpha y_a + \beta y_b) = 0$

  $\rightsquigarrow$ Basis $= \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ geeignet gewählt, linear unabh.

- allg. Lösung der homogenen ODE ist $y_{c_1 c_2 \dots c_n}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$ (7.2)

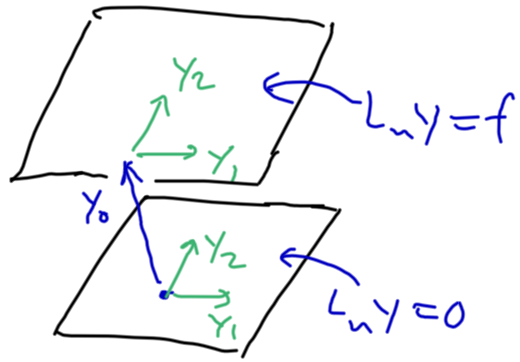
- allg. Lösung der inhomogenen ODE ist $y_{c_1,c_2,\dots,c_n}(x) = y_0(x) + c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ (7.3)

  wobei $y_0(x)$ irgendeine spezielle Lösung ist: $L_n y_0 = f$ & $L_n y_{k>0} = 0$

→ Lösungsmenge von $L_n y = f$ ist kein Vektorraum für $f \neq 0$

→ können zu y_0 beliebige homogene Lösungen addieren

→ Differenz zweier inhomogener Lösungen ist eine homogene Lösung



VII.2 Zehn Fälle

5 linear, danach 5 nichtlinear

① Potenz-Ansatz

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad L_2 = x^2 \partial_x^2 - 2x\partial_x + 2$$

Ableitungen = # x-Potenz $\rightsquigarrow$ dim $L_2 = 0$

Ansatz: $y = x^\lambda$ [allgemeiner: Potenzreihen-Ansatz]

eingesetzt: $x^\lambda \{ \lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 \} \overset{!}{=} 0$

$\rightsquigarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightsquigarrow \begin{Bmatrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{Bmatrix} \rightsquigarrow$ 2 Basis-Lösungen $\begin{cases} x^1 \\ x^2 \end{cases}$

allg. Lösung: $y = c_1 x + c_2 x^2$ Test: Einsetzen

2 Variablen-Wechsel

$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ aber auch $x > 0$

inspiriert Wechsel $x = e^t$ weil $x \in [0,\infty] \Leftrightarrow t \in [-\infty, +\infty]$

$y(x) = y(e^t) =: u(t) = u(\ln x)$

$\frac{dx}{dt} = e^t \rightsquigarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$

$\partial_x = \frac{dt}{dx}\partial_t = e^{-t}\partial_t \,, \quad \partial_x^2 = e^{-t}\partial_t(e^{-t}\partial_t) = e^{-2t}\partial_t^2 - e^{-2t}\partial_t$

$\rightsquigarrow L_2 = e^{2t} \cdot e^{-2t}(\partial_t^2 - \partial_t) - 2e^t \cdot e^{-t}\partial_t + 2$

$= \partial_t^2 - 3\partial_t + 2$ konstante Koeffizienten!

$\rightsquigarrow \ddot{u} - 3\dot{u} + 2u = 0$ Lösung → 3

3 Exponential-Ansatz

$m\ddot{x} = -\kappa x - R\dot{x}$ $\kappa, R > 0 \,, \quad x \in \mathbb{R}$

ohne Reibung $(R=0)$: Schwingung mit $\omega_0^2 = \kappa/m$

setze $\kappa =: m\omega_0^2$ und $R =: 2m\gamma$

$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\gamma\dot{x} \iff L_2 x = 0$ mit $L_2 = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$

Exponential-Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

einsetzen gibt: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad *$

Lösungen: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sigma$ mit $\sigma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

2 Grundlösungen: $x_1 = e^{\lambda_1 t}$, $x_2 = e^{\lambda_2 t}$

allg. Lösung (homogen!): $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \leftrightarrow$ AW

$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t}(c_1 e^{\sigma t} + c_2 e^{-\sigma t})$

→ Exp-Ansatz löst allg. lineare ODE mit konstanten Koeffizienten

hier: unterscheide 3 Fälle (je nach Lsg. von *)

(a) $\gamma > \omega_0 \rightsquigarrow \sigma$ reell, $< \gamma \rightsquigarrow \lambda_{1,2}$ reell, $< 0 \rightsquigarrow$ abklingende exp-Fkt.

(b) $\gamma < \omega_0 \rightsquigarrow \sigma = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} =: i\omega \rightsquigarrow \lambda_1^* = \lambda_2 \rightsquigarrow x$ komplex?

$\rightsquigarrow x(t) = e^{-\gamma t}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) \overset{\text{Euler}}{=} e^{-\gamma t}([c_1 + c_2]\cos\omega t + i[c_1 - c_2]\sin\omega t)$

Realität von $x \rightsquigarrow x^* \overset{!}{=} x \rightsquigarrow c_1 + c_2$ & $i(c_1 - c_2)$ reell

(c) $\gamma = \omega_0 \rightsquigarrow \sigma = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma \rightsquigarrow$ nur <u>eine</u> Grundlösung? nein!

$\longrightarrow x(t) = e^{-\gamma t}(c + d \cdot t)$

etwas cleverer: $L_2 = (\partial_t + \gamma)^2 + (\omega_0^2 - \gamma^2)$

suggeriert Ansatz: $x(t) = e^{-\gamma t} \cdot u(t)$

einsetzen: $(\partial_t + \gamma) e^{-\gamma t} = 0 \rightsquigarrow (\partial_t + \gamma) x = e^{-\gamma t} \dot{u} \rightsquigarrow$

$$L_2 x = e^{-\gamma t}\left(\ddot{u} + (\omega_0^2 - \gamma^2) u\right) = 0 \rightsquigarrow$$

$$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \gamma^2) u = 0 \qquad \text{kein } \dot{u}$$

3 Fälle: (a) $\gamma < \omega_0 \rightsquigarrow \quad u \sim e^{\pm \sigma t}$

(b) $\gamma > \omega_0 \rightsquigarrow \quad u \sim e^{\pm i \omega t}$

(c) $\gamma = \omega_0 \rightsquigarrow \quad u = c + d \cdot t$

4 Funktionswechsel: $y'(x) + P(x) y(x) = Q(x)$

allg. lin. ODE 1. Ordnung: $L_1 = \partial_x + P(x)$, $f(x) = Q(x)$

- suche die eine Grundlösung der homogenen Gleichung: y_1

$$y_1' + P y_1 = 0 \rightsquigarrow \frac{y_1'}{y_1} = \partial_x \ln y_1 = -P \rightsquigarrow \ln y_1 = -\int_{x_0}^{x} dx' \, P(x') \rightsquigarrow$$

$$y_1(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx' \, P(x')} \qquad (7.4)$$

• fehlt: eine spezielle Lösung der inhomogenen Gl.: y_0

Trick: Funktionswechsel von y_0 nach u: $y_0(x) =: u(x) \cdot y_1(x)$

einsetzen: $u' y_1 + \underbrace{u y_1' + P u y_1}_{* \to 0} = Q$, aber $y_1' + P y_1 = 0$ *

$$\rightsquigarrow \quad u' = Q/y_1 \longrightarrow u(x) = \int_{x_1}^{x} dx' \, \frac{Q(x')}{y_1(x')} \rightsquigarrow$$

$$y_0(x) = y_1(x) \cdot \int_{x_0}^{x} dx' \, \frac{Q(x')}{y_1(x')}$$ inhomogene Lösung (7.5)

Lösungsformel:

$$y(x) = y_0 + c_1 y_1 = e^{-\int_{x_1}^{x} dx' P(x')} \left(C_1 + \int_{x_0}^{x} dx' \, Q(x') \, e^{+\int_{x_1}^{x} dx' P(x')} \right) \quad (7.6)$$

allg.: Wahl neuer Funktionen ist vielseitig, bringt aber selten Vereinfachung

z.B. $y = 1/u \rightsquigarrow y' = -u'/u^2 \rightsquigarrow -\frac{u'}{u^2} + \frac{P}{u} = Q \to u' - Pu = -Qu^2$

Bernoulli-ODE ist nichtlinear ↯

5 Variation der Konstanten:

$$y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = f(x)$$

allg. lin. ODE 2. Ordnung! $\quad L_2 = \partial_x^2 + a\,\partial_x + b$

homog. Gleichung hat 2 Grundlösungen; $\nexists$ allg. Lösungsmethode

falls (!) <u>eine</u> Grundlösung y_1 bekannt, dann gibt es Strategie:

neue Funktion u über: $\quad y(x) =: u(x)\cdot y_1(x) \quad$ [$c_1 \to u(x)$ „Var. der Konst."]

also: $\quad y' = y_1' u + y_1 u' \quad , \quad y'' = y_1'' u + 2 y_1' u' + y_1 u''$

einsetzen: $\quad y_1 u'' + 2 y_1' u' + \underbrace{y_1'' u} + a y_1 u' + \underbrace{a y_1' u} + \underbrace{b y_1 u} = f$

$\quad \to 0$ wegen $L_2 y_1 = 0$

$$\rightsquigarrow \quad y_1 u'' + (2 y_1' + a y_1)\cdot u' = f$$

keine u-Terme mehr!

definiere $u' =: v \quad \rightsquigarrow \quad v' + \underbrace{\left(a + 2\frac{y_1'}{y_1}\right)}_{p}\cdot v = \underbrace{\frac{f}{y_1}}_{=q} \quad \rightsquigarrow$ zurück zu 4 ✓

<u>Bsp.:</u> $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ erlaubt $x_1(t) = e^{i\omega t} \longrightarrow x = e^{i\omega t}\cdot u(t) \xrightarrow{\text{einsetzen}}$

$e^{i\omega t}\left(\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \cancel{\omega^2 u} + \cancel{\omega^2 u}\right) = f \xrightarrow{\dot{u}=v} \dot{v} + 2i\omega v = f\, e^{-i\omega t} \xrightarrow{(7.6)} v = \ldots$

$$x(t) = e^{i\omega t}\left[c_2 + \int_0^t dt'\, e^{-2i\omega t'}\left(c_1 + \int_0^{t'} dt''\, f(t'')\, e^{-i\omega t''}\right)\right] \quad (7.7)$$

Bemerkungen

1) für $f \equiv 0$ (homogen) und y_1 bekannt:

$$v = e^{-\int_{x_1}^{x} dx' \left[a + 2\partial_{x'} \ln y_1 \right]} = \left(\frac{y_1(x_1)}{y_1(x)} \right)^2 e^{-\int_{x_1}^{x} dx' a(x')} \rightsquigarrow y_2$$

2) für L_n statt L_2 und y_1 bekannt:

dieses Verfahren reduziert $L_n \to L_{n-1}$

--- ab jetzt nichtlinear ---

6 Trennung der Variablen: $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$

lese ab $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \rightsquigarrow \underbrace{\frac{dy}{g(y)}}_{\text{nur } y} = \underbrace{f(x)\, dx}_{\text{nur } x} \rightsquigarrow$

$$\underbrace{\int_{y(x_0)}^{y} \frac{dy'}{g(y')}}_{\overset{!}{=}\, H(y)} = \underbrace{\int_{x_0}^{x} dx' f(x')}_{\overset{!}{=}\, F(x) + C} \qquad (7.8)$$

$$H(y) = F(x) + C \quad \longleftarrow \text{Stammfunktionen}$$

mit $F'(x) = f(x)$

$H'(y) = 1/g(y)$

Lösung formal: $y(x) = H^{-1}(F(x) + C)$ (7.8')

7 Reduktion der Ordnung

a) $y'' = f(y, y')$ $\quad$ x kommt nicht in f vor!

Trick: betrachte y' als Funktion von y:

$$y' =: p(y) \rightsquigarrow y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p' \cdot y' = p' \cdot p$$

einsetzen: $p' \cdot p = f(y, p)$ $\quad$ ODE 1. Ordnung für $p(y)$

falls gelöst, komme zurück zu $y(x)$ mit $y'(x) = p(y)$: Fall 6 ✓

b) $y'' = f(x, y')$ $\quad$ y kommt nicht in f vor!

Trick: nehme $y' =: u$ als neue Funktion $\rightsquigarrow$ $u' = f(x, u)$ ODE 1. Ordnung ✓

c) $Ly = f$ mit $L = L_1 \cdot L_2$ $\quad$ Produktstruktur!

Trick: $L_1 L_2 y = L_1 u = f$ mit $L_2 y =: u$

$\rightsquigarrow$ 2 ODEs 1. Ordnung: löse erst für u, dann für y ✓

8 Umwandlung in ODE-System

ODE n-ter Ordnung $\longrightarrow$ System von $\overset{n}{\wedge}$ ODEs 1. Ordnung

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}, \dots, y', y, x\right)$$

definiere:

$$\left.\begin{aligned} y' &=: u_1 \\ y'' &=: u_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &=: u_{n-1} \\ y^{(n)} &= f(\dots) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} y' &= u_1 \\ u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{n-2}' &= u_{n-1} \\ u_{n-1}' &= f(u_{n-1}, \dots u_1, y, x) \end{aligned}\right\}$$

falls <u>linear</u>, d.h. $f = a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y + a(x)$,

dann von Matrix-Form: $\underline{Y}' = A \cdot \underline{Y} + \underline{F}$ mit

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} y \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underset{\updownarrow \atop P(x)}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underset{\updownarrow \atop Q(x)}{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

dies ist matrix-wertige Verallg. von 4

Illustration: $\underline{n=2}$ linear $\rightsquigarrow$ allg. lineare ODE 2. Ordnung

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = f(t) \qquad \text{def.:} \quad \dot{x} =: v$$

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \longleftrightarrow \dot{Y} \overset{*}{=} A(t) \cdot Y + F(t) \quad (7.10a)$$

erst die homog. Gl., d.h. $F = 0$.

Def.: Zeitentwicklungsmatrix $\mathcal{U}(t, t_0)$

(7.10b) $$Y(t) = \mathcal{U}(t, t_0) \cdot Y(t_0) \quad \text{für AW} \quad Y(t_0) = Y_0$$

ODE $\rightsquigarrow$ $$\dot{Y} = \dot{\mathcal{U}} Y_0 \overset{*}{=} A \cdot \mathcal{U} Y_0 = AY \rightsquigarrow \dot{\mathcal{U}} = A \cdot \mathcal{U} \quad (7.10c)$$

AW: $\mathcal{U}(t_0, t_0) = \mathbb{1}$

dann die inhomog. Gl., also $F \neq 0$.

Ansatz: $Y = \mathcal{U} \cdot Z$ (Z statt Y_0, „Variation der Konstanten“)

ODE $\rightsquigarrow$ $$\dot{Y} = \dot{\mathcal{U}} Z + \mathcal{U} \dot{Z} = \underbrace{\overbrace{A\,\mathcal{U} Z}^{Y}} + \mathcal{U}\dot{Z} \overset{*}{=} \underline{AY} + F \rightsquigarrow$$

$$\mathcal{U}\dot{Z} = F \rightsquigarrow \dot{Z} = \mathcal{U}^{-1} F \rightsquigarrow Z(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} dt'\, \mathcal{U}(t', t_0)^{-1} F(t')$$

Gesamtlösung: $$Y(t) = \mathcal{U}(t, t_0) \left[Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt'\, \mathcal{U}(t', t_0)^{-1} F(t') \right] \quad (7.10d)$$

Vorsicht: für $n=1$ ist $U(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} dt' A(t')}$

für $n>1$ ist dies i.a. falsch, weil $[A(t_1), A(t_2)] \neq 0$.

Im Spezialfall konstanter Koeffizienten, d.h. $A(t) = A =$ konst., ist Lösung möglich:

$$U(t,t_0) = e^{(t-t_0)\cdot A} := \mathbb{1} + (t-t_0)A + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 A^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(t-t_0)^n A^n \qquad (7.11)$$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \dots$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad \text{Drehmatrix!}$$

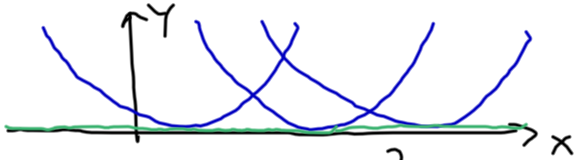
inhomog. Lsg. in diesem Fall:

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}\left[Y(t) + \int_{t_0}^{t} dt' \, e^{-(t-t_0)A} F(t')\right] \qquad (7.12)$$

9 Singuläre Lösung: $(y')^2 = 4y$ für $y \geq 0$

$\rightsquigarrow y' = \pm 2\sqrt{y} \xrightarrow{\text{TdV}} \frac{y'}{2\sqrt{y}} = \partial_x \sqrt{y} = \pm 1 \rightsquigarrow \sqrt{y} = \pm (x+c)$

allg. Lsg.: $y_c(x) = (x-c)^2$



zusätzlich: $y(x) \equiv 0$

und auch stückeln: $y(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ (x-c)^2 & x \geq c \end{cases}$ „singulär"

Lösungsmenge = $\{$regulär $y_c\} \cup \{$singulär$\}$

10 Greensche Funktion: $L_n y(x) = f(x)$

f: Ursache, y: Antwort

elementare Ursache: $f(x) = \delta(x-a)$

jedes f kann zusammengesetzt werden $f(x) = \int da \, \delta(x-a) f(a)$

Def: $L_n G(x,a) = \delta(x-a)$ (7.13)

Rekonstruktion von y zu f aus Kenntnis von G:

$$\int da\ f(a)\ L_n\ G(x,a) = \int da\ f(a)\ \delta(x-a)$$

$\Vert$ L_n linear $\qquad\qquad$ $\Vert$ Def. von δ

$$L_n \underbrace{\int da\ f(a)\ G(x,a)} = f(x)$$

also: $\quad y(x) = \int da\ G(x,a)\ f(a) \qquad (7.14)$

löst $\quad L_n y = f$

formal: $\quad G = L_n^{-1}$

Konstruktion von G ist möglich aus Lsgn. der homog. ODE

ENDE